ENSAI

INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

concours d'élève titulaire de l'ENSAI
concours externe d'attaché de l'INSEE

L'usage des calculatrices est interdit

Notations – Rappels

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans le corps $\mathbb{R}$ des réels, et par $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n, $n \in \mathbb{N}$. Dans tout le problème, on confondra polynôme et fonction polynôme associée.

On note $E = \mathcal{C}([-1, +1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[-1, +1]$ dans $\mathbb{R}$.

On définit une application $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \varphi(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'.$$

PARTIE I

Soit n un entier naturel.

1. Montrer que la restriction de φ à $\mathbb{R}_n[X]$ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ que l'on notera φ_n.
Écrire la matrice de φ_n dans la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.*a*. Déterminer les valeurs propres de φ_n.

b. Prouver que φ_n est diagonalisable et qu'il existe une unique base de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres $(P_0, \ldots, P_n)$ telle que :

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad \deg P_k = k \quad \text{et} \quad P_k \text{ unitaire.}$$

3. Déterminer P_0, P_1, P_2, P_3.

4. Déterminer les coefficients de X^{k-1} et de X^{k-2} dans P_k.

5. Prouver que la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

PARTIE II

Étant donné deux éléments de E, f et g, on pose :

$$(f \mid g) = \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, f(t)\, g(t)\, dt.$$

1. Montrer que l'on a ainsi défini un produit scalaire sur E. On note $\| \ \|$ la norme associée.

2. Montrer que :

$$\forall (f, g) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad (\varphi(f) \mid g) = (f \mid \varphi(g)).$$

3. Montrer que :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad m \neq n \Rightarrow (P_m \mid P_n) = 0.$$

4. Calculer $\| P_0 \|$.

5. On pose :

$$I_n = \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, t^n\, dt \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\theta)^n\, d\theta.$$

a. En effectuant dans I_n le changement de variable :

$$\theta = \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}},$$

exprimer I_n en fonction de J_n et J_{n+1}.

b. Déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-2} et en déduire la valeur de J_n à l'aide de factorielles.

c. En déduire une expression de I_n en fonction de n à l'aide de factorielles, puis une expression de $(X^i \mid X^j)$ pour $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.

PARTIE III

Soit n un entier naturel non nul.

1.*a.* Montrer que P_n possède au moins un zéro d'ordre de multiplicité impair situé dans $]-1, +1[$.

b. En notant $(z_1, \ldots, z_p)$ les zéros de P_n d'ordre de multiplicité impair situés dans $]-1, +1[$, montrer par l'absurde que $p = n$.

2.*a*. Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$; montrer que :

$$(Q \mid P_{n+2} - XP_{n+1}) = 0.$$

b. Déterminer le degré et le coefficient dominant de $P_{n+2} - XP_{n+1}$.

c. En déduire la relation :

$$P_{n+2} - XP_{n+1} = -\frac{1}{4} P_n.$$

3. Déterminer $P_n(0)$ et $P_n(1)$.

4. Calculer $\| P_1 \|$ et $\| P_2 \|$.

5. Montrer que :

a. $(P_n \mid X^n) = (P_n \mid P_n)$;

b. $(P_n \mid X^{n+1}) = -\frac{1}{2}(P_n \mid P_n)$;

c. $(P_n \mid X^{n+2}) = \frac{n+2}{4}(P_n \mid P_n)$.

6. On pose $x_n = (P_n \mid P_n)$; donner une relation entre x_n, x_{n+1} et x_{n+2} et vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \| P_n \| = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}.$$

PARTIE IV

Soit f un élément de E.

1. Montrer qu'il existe une unique suite de réels $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression :

$$\left\| f - \sum_{i=0}^{n} c_i P_i \right\|^2$$

soit minimale.

2. En déduire que la série de terme général $\frac{(f \mid P_i)^2}{\| P_i \|^2}$, $(i \in \mathbb{N})$, est convergente et que l'on a :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(f \mid P_i)^2}{\| P_i \|^2} \leqslant \| f \|^2.$$

3. On pose $S_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{(f \mid P_i)}{\| P_i \|^2} P_i$; montrer, en utilisant un théorème de Weierstrass, que :

$$\lim_{n \to \infty} \| S_n - f \| = 0.$$

4. On suppose que la série de fonctions $\sum \frac{(f \mid P_i)}{\| P_i \|^2} P_i$ converge uniformément sur $[-1, +1]$ et l'on note $\tilde{f}$ sa somme. Prouver que $\tilde{f}$ est continue et que $\tilde{f} = f$.